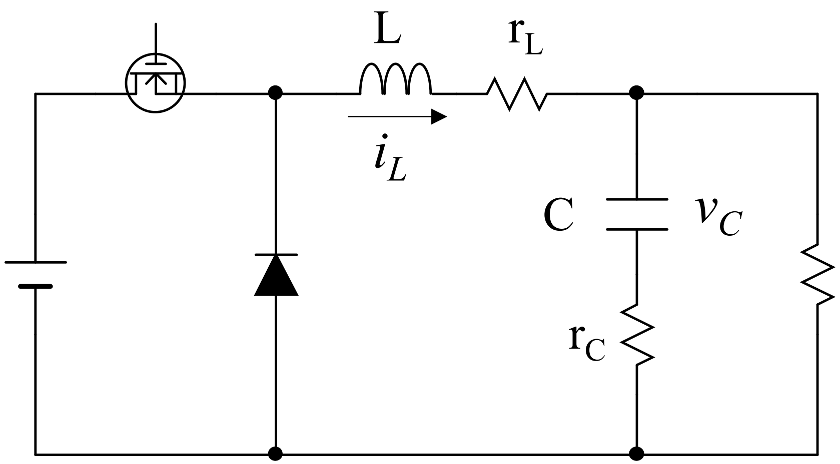
状態平均化法による解析



制御工学の教科書に載っている状態方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$x(t)$: 状態変数、$y(t)$：出力、$u(t)$: 入力
A~C: 係数行列

インダクタ電流i_Lとコンデンサ電圧v_Cを状態変数とする

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

次のコンバータの状態方程式を解く。

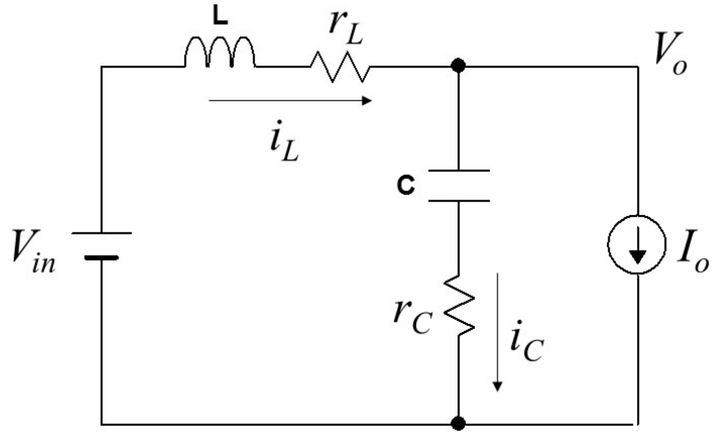
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + bV_{in} + cI_o \\ V_o = d\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + eI_o \end{cases} \qquad (1)$$

オン期間の状態方程式1

オン期間における状態方程式

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = V_{in} - i_L r_L - V_o \\ i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} V_o = v_C + i_C r_C \\ i_C = i_L - I_o \end{cases} \qquad (3)$$



オン期間の等価回路

(2)に(3)を代入して、

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{r_L + r_C}{L} i_L - \dfrac{1}{L} v_C + \dfrac{1}{L} V_{in} + \dfrac{r_C}{L} I_o \\ \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L - \dfrac{1}{C} I_o \end{cases} \qquad (4)$$

整理して、

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_L + r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} + \begin{bmatrix} \dfrac{r_C}{L} \\ -\dfrac{1}{C} \end{bmatrix} I_o \qquad (5)$$

オン期間の状態方程式2

(3)を整理して、

$$V_o = \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} - r_C I_o \qquad (6)$$

(5), (6)より、オン期間の状態方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x = A_1 x + b_1 V_{in} + c_1 I_o \\ V_o = d_1 x + e_1 I_o \end{cases} \qquad (7)$$

ここで、オン期間の各係数行列は、

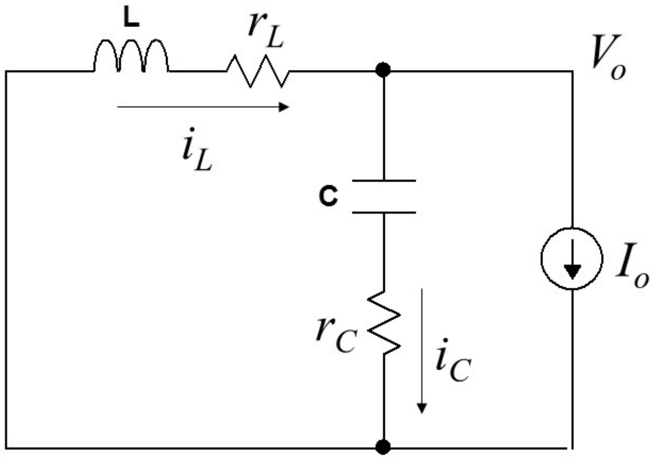
$$A_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_L + r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix},\ b_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix},\ c_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{r_C}{L} \\ -\dfrac{1}{C} \end{bmatrix},\ d_1 = \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix},\ e_1 = -r_C \qquad (8)$$

オフ期間の状態方程式1

オフ期間における状態方程式

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = -i_L r_L - V_o \\ i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} V_o = v_C + i_C r_C \\ i_C = i_L - I_o \end{cases} \qquad (10)$$



オフ期間の等価回路

(9)に(10)を代入して、

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{r_L + r_C}{L} i_L - \dfrac{1}{L} v_C + \dfrac{r_C}{L} I_o \\ \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L - \dfrac{1}{C} I_o \end{cases} \qquad (11)$$

整理して、

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_L + r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} + \begin{bmatrix} \dfrac{r_C}{L} \\ -\dfrac{1}{C} \end{bmatrix} I_o \qquad (12)$$

オフ期間の状態方程式2

(10)を整理して、

$$V_o = \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} - r_C I_o \tag{13}$$

(12), (13)より、オン期間の状態方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = A_2 x + b_2 V_{in} + c_2 I_o \\ V_o = d_2 x + e_2 I_o \end{cases} \tag{14}$$

ここで、オフ期間の各係数行列は、

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_L + r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ c_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{r_C}{L} \\ -\dfrac{1}{C} \end{bmatrix},\ d_2 = \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix},\ e_2 = -r_C \tag{15}$$

全体の状態方程式1

オン期間とオフ期間の状態方程式をディーティーDで加重平均し、A~eの係数行列を求める

$$
\begin{cases}
A = DA_1 + (1-D)A_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{r_L + r_C}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \\
b = Db_1 + (1-D)b_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\
c = Dc_1 + (1-D)c_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{r_C}{L} \\ -\dfrac{1}{C} \end{bmatrix} \\
d = Dd_1 + (1-D)d_2 = \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \\
e = De_1 + (1-D)e_2 = r_C
\end{cases}
\tag{16}
$$

状態方程式は、

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}x = Ax + bV_{in} + cI_o \\
V_o = dx + eI_o
\end{cases}
\tag{17}
$$

定常解の導出

定常状態では、$\frac{d}{dt}x(t)=0$ が成立する

(1)の状態方程式を変形して、

$$\begin{cases} X = A^{-1}\left(bV_{in}+cI_o\right) \\ V_o = dX + eI_o \end{cases} \tag{18}$$

ここで、

$$A^{-1} = LC\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{r_L+r_C}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ -L & -C\left(r_L+r_C\right) \end{bmatrix} \tag{19}$$

よって、

$$X = -\begin{bmatrix} 0 & C \\ -L & -C\left(r_L+r_C\right) \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix}V_{in} + \begin{bmatrix} \frac{r_C}{L} \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix}I_o\right\} = \begin{bmatrix} I_o \\ DV_{in}-r_LI_0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$V_o = dX + eI_o = \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_o \\ DV_i - r_LI_o \end{bmatrix} - r_CI_o = DV_i - r_LI_o \tag{21}$$

小信号解析

各変数に対し、定常値に加えて微小変動を考慮する

$$\begin{cases} V_i \to V_i + \Delta V_i(t) \\ D \to D + \Delta D(t) \\ I_o \to I_o + \Delta I_o(t) \\ x(t) \to X + \Delta X(t) \\ v_o(t) \to V_o + \Delta V_o(t) \end{cases}$$

微小変動を考慮した状態方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(X+\Delta X\right)}{dt} = \left(A + \dfrac{\partial A}{\partial D}\Delta D\right)\left(X+\Delta X\right) + \left(b + \dfrac{\partial b}{\partial D}\Delta D\right)\left(V_i + \Delta V_i\right) + \left(c + \dfrac{\partial C}{\partial D}\Delta D\right)\left(I_o + \Delta I_o\right) \\ V_o + \Delta V_o = \left(d + \dfrac{\partial d}{\partial D}\Delta D\right)\left(X+\Delta X\right) + \left(e + \dfrac{\partial e}{\partial D}\Delta D\right)\left(I_o + \Delta I_o\right) \end{cases} \quad (22)$$

(16)式よりA、c、d、eはDに無依存なので、

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(X+\Delta X\right)}{dt} = A\left(X+\Delta X(t)\right) + \left(b + \dfrac{\partial b}{\partial D}\Delta D\right)\left(V_i + \Delta V_i\right) + c\left(I_o + \Delta I_o\right) \\ V_o + \Delta V_o = d\left(X + \Delta X(t)\right) + e\left(I_o + \Delta I_o\right) \end{cases} \quad (23)$$

小信号解析

定常解(17)を代入し、2次の微小項を無視すると、

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta X}{dt} = A\Delta X(t) + \dfrac{\partial b}{\partial D}\Delta D(t)V_i + b\Delta V_i(t) + c\Delta I_o \\ \Delta V_o = d\Delta X(t) + e\Delta I_o \end{cases} \tag{24}$$

この式をラプラス変換し整理する

$$\begin{cases} \Delta X(s) = (sI - A)^{-1}\left(\dfrac{\partial b}{\partial D}\Delta D(t)V_i + b\Delta V_i(t) + c\Delta I_o\right) \\ \Delta V_o(s) = d\Delta X(s) + e\Delta I_o(s) \end{cases} \tag{25}$$

(16)より、$sI - A = \begin{bmatrix} s + \dfrac{r_L + r_C}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & s \end{bmatrix}$ (26)

よって、$(sI - A)^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix} s & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & s + \dfrac{r_L + r_C}{L} \end{bmatrix}$ (27)

小信号解析

ただし、逆行列式$\Delta(s)$は、

$$\Delta(s) = s\left(s + \frac{r_L + r_C}{L}\right) + \frac{1}{LC} = s^2 + \frac{r_L + r_C}{L}s + \frac{1}{LC} \tag{28}$$

標準2次形式で表すと、

$$\Delta(s) = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 \tag{29}$$

ここで、
$$\delta = \frac{r_L + r_C}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \tag{30}$$

(24)式中の偏微分項は(16)式より、

$$\frac{\partial b}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D}\begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

これを(24)に代入すると、(25)式は次式となる

$$\Delta X(s) = \frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{r_L + r_C}{L} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_i \Delta D + \begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta V_i + \begin{bmatrix} \frac{r_C}{L} \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \Delta I_o \right) \tag{32}$$

小信号解析

簡単のため、$\varDelta V_i$=0、ΔI_o=0 とし、$\varDelta D$に対する影響のみ考慮すると

$$\Delta X(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} s & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & s + \dfrac{r_L + r_C}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_i \Delta D = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \dfrac{s}{L} \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} V_i \Delta D \tag{32}$$

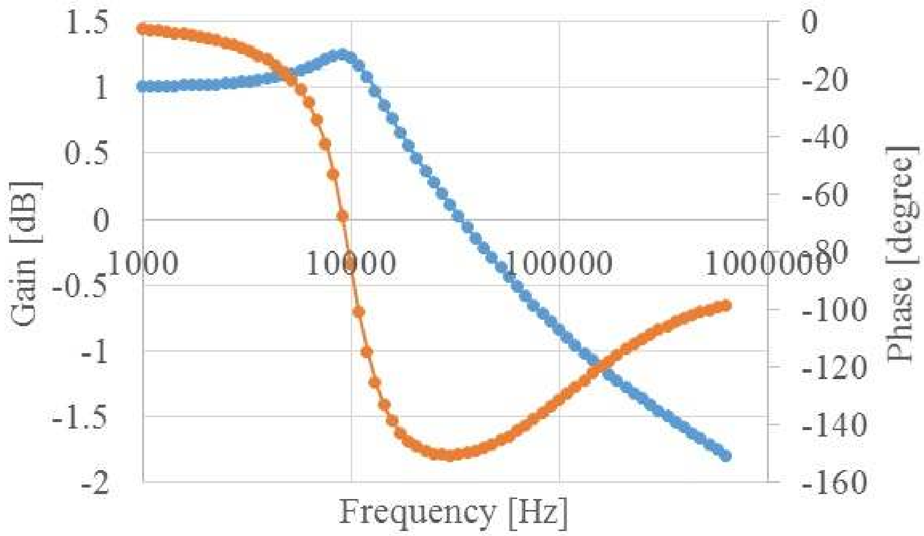
(25)式より、

$$\Delta V_o(s) = d\Delta X(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} r_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s}{L} \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} V_i \Delta D = \frac{1}{\Delta(s)} \left(\frac{r_C}{L} s + \frac{1}{LC} \right) V_i \Delta D \tag{33}$$

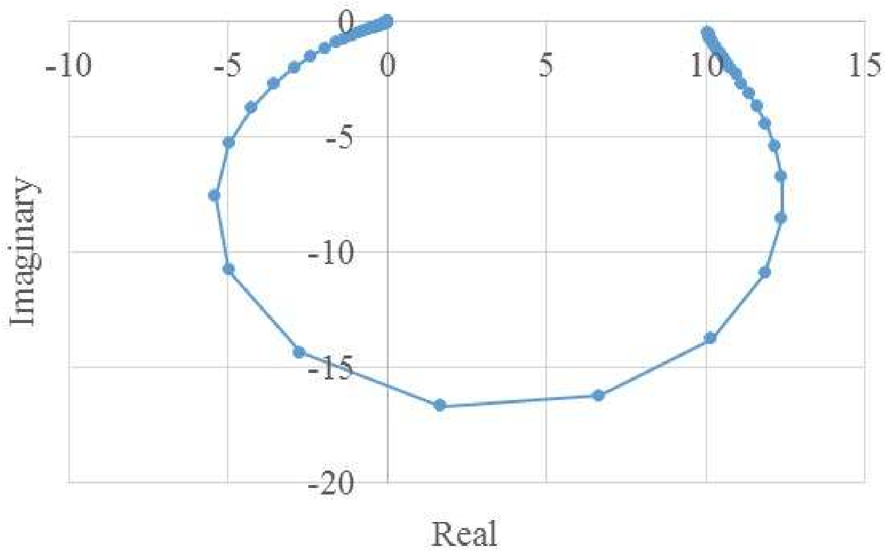
よって、$\varDelta D$に対する伝達関数$G(s)$は、

$$G(s) = \frac{\Delta V_o}{\Delta D} = \frac{1}{\Delta(s)} \left(\frac{r_C}{L} s + \frac{1}{LC} \right) V_i \tag{34}$$

伝達関数の例



Bode Plot



Nyquist Plot

$L = 100\ \mu\mathrm{H}$
$C = 100\ \mu\mathrm{H}$
$r_L = 0.5\ \Omega$
$r_C = 0.1\ \Omega$
$V_i = 10\ \mathrm{V}$